ҚАТАРЛАР ТАРАУЫ БОЙЫНША ПРАКТИКАЛЫҚ САҒАТТАРЫ

1.1 Қатар және оның қосындысы

1 мысал. Қатар өзінің алғашқы мүшелерімен $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\ldots$,берілген. Осы қатардың жалпы мүшесінің ең қарапайым формуласын жаз.

Шешуі: Қатардың мүшелерінің алымдары натурал сандардың квадраттары, ал бөлімдері 2 ден басталатын натурал сандар екенін байқау қиын емес. Сондықтан қатардың жалпы мүшесінің қарапайым формуласы $a = \frac{n^2}{n+1}$ түрінде беріледі.

Ескерту. Қарастырылған мысалда қатардың жалпы мүшесінің формуласын ең қарапайым түрінде келтіру талап етіледі. Бұл кейздейсоқ талап емес, өйткені алғашқы бірнеше мүшесі бойынша тек қана бір қатар құрау мүмкін емес. Мысалы қатардың алғашқы үш мүшесі берілсін 1+2+4+… . Берілген мүшелердің 2 санының “0”, ”1” және “2” дәрежесі екенін байқау қиын емес, сондықтан қатарлардың жалпы мүшесінің қарапайым түрі ретінде $a_n=2^{n-1}$ теңдігін келтіруге болады. Дегенмен, n=1,2,3 болғанда алғашқы мүшелері
1, 2, және 4 болатын көптеген формулаларды, мысалы,

$$a_n=\frac{n^2-n+2}{2}\ , \qquad в=\begin{cases}\frac{2(n+1)}{5-n}, & n\neq 5\\ 1, & n=5\end{cases}\ , \qquad c_n=\frac{8}{n^2-7n+14}$$

құрастыруға болады. Жалпы мүшелері бірінші және екінші формулалар арқылы берілетін қатарлар жинақсыз (олар үшін жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды), ал үшінші формула арқылы берілген қатар жинақты (мұны қатарды жинақты қатармен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақтылықтың екінші белгісі арқылы салыстырып байқауға болады).

2 мысал. $\frac{1}{3}+\frac{8}{12}+\frac{15}{21}+\frac{22}{30}+\ldots$ қатарының жалпы мүшесін анықта.

Шешуі: Қатардың мүшелерінің алымдары екіншісінен бастап алдынғыларына 7 санын қосқанға тең, ал бөлімдері 9 санын қосқанға тең екенін байқау қиын емес, яғни алымдары да бөлімдері де сәйкес түрде айырмалары 7-ге және 9-ға тең арифметикалық прогрессиялар екені байқалады. Олай болса $e_n=e_1+(n-1)d$ (арифметикалық прогрессияның кез-келген мүшесін анықтау формуласы) формуласын пайдаланып

$a_n=\frac{1+(n-1)7}{3+(n-1)9}=\frac{7n-6}{9n-6}$ болатынын анықтаймыз.

3 мысал. $\frac{3}{1}-\frac{6}{3}+\frac{9}{7}-\frac{12}{15}+\ldots$ қатарының жалпы мүшесін анықта.

Шешуі: Бөлшектердің алымдары 6=3+3,9=6+3,12=9+3 …, олай болса $\ell_n=3+(n-1)\cdot 3=3n$. Ал бөлімдері $1=2-1$, $3=2^2-1$, $7=2^3-1$, $15=2^4-1$. Олай болса $в_n=2^n-1$

Сонымен, $a_n=\frac{\ell_n}{в_n}=\frac{3n}{2^n-1}-$ қатардың жалпы мүшесі.

4 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$ қатары жинақтылықтың қажетті шартын қанағаттандыратынын, бірақ жинақсыз қатар екенін көрсет.

Шешуі: $\underset{n\to\infty}{\ell im\grave{a}}_n=\underset{n\to\infty}{\ell im}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ болғандықтан жинақтылықтың қажетті шарты орынды.

Қатардың жинақсыз екендігін дәлелдеу үшін оның n-ші дербес қосындысын бағалайық:

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

Яғни $S_n\geq\sqrt{n}$ Осыдан $\underset{n\to\infty}{\ell im}S_n=\infty$ аламыз. Олай болса қатар жинақсыз.

5 мысал. Коши критерин пайдаланып $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$ қатарының жинақты болатындығын дәлелде.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін кез келген ε>0 санын алып, n>N теңсіздігі орынды болғанда , кез келген натурал p саны бойынша

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon \qquad \text{(A)}$$

теңсіздігінің орындылығын растайтын N>0 санының болатындығын көрсетсек жеткілікті. Мысалдың жағдайында

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\left|\frac{n+1}{(n+2)2^{n+1}}+\frac{n+2}{(n+3)2^{n+2}}+\ldots\frac{n+p}{(n+p+1)2^{n+p}}\right|<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots$$

Сонымен , кез

$$+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{\left(1/2^{n+1}\right)\left(1-1/2^p\right)}{1-1/2}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$$

келген p саны үшін $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\frac{1}{2^n}$, ал $1/2^n<\varepsilon$ теңсіздігі $2^n>1/\varepsilon$ теңсіздігімен бірдей болғандықтан және $n>\log_2(1/\varepsilon)$ ескерсек,онда

$$N=\begin{cases}\log_2\left(1/\varepsilon\right), & \text{егер } \varepsilon<\frac{1}{2}\\ 1, & \text{егер } \varepsilon\ge\frac{1}{2}\end{cases}\qquad (\text{Б})$$

болады деп үйғарып, n>N теңсіздігінің орындылығынан $1/2^n<\varepsilon$ теңсіздігі туындайтынын, ал олай болса, кез келген p саны үшін (А) теңсіздігінің орындылығы туындайды деп айта аламыз. Олай болса, осыдан кез келген ε>0 саны үшін (Б) формуласы арқылы тек ε санына тәуелді, ал p санына тәуелсіз N саны табылып, барлық n>N үшін (А) теңсіздігінің кез келген натурал p саны үшін орынды екені туындайды. Онда Кошидің критериі бойынша берілген қатарлар жинақты.

6 мысал. Коши критериін пайдаланып $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ қатарының жинақсыз екенін дәлелдеңіз.

Шешуі: Бұл арада

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2p-1}\qquad (\text{В})$$

Осы (В) қосындысы ε санынан кіші болмайтын p саны мен ε саны болатындығын анықтау қажет. Егер $\varepsilon=\frac{1}{4}$ ал, $p=2n$ сандарын алсақ, онда

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-1}>\underbrace{\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}+\ldots+\frac{1}{6n}}_{2n}=2n\cdot\frac{1}{6n}=\frac{1}{3}>\varepsilon=\frac{1}{4}$$

теңсіздігінің орындалатынын аңғару қиын емес. Осыдан Кошидің критериі бойынша берілген қатар жинақсыз болатындығы айқындалады.

7 мысал. $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+a_nq^{n-1}+\ldots$, $a\neq 0$ шексіз геометриялық прогрессияның қосындысын тап.

Ескерту. ”Шексіз геометриялық прогрессия” тіркесі арқылы $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1}$ сандар тізбегінде және осы тізбектің мүшелерінен жасалған қатарды да атайтын боламыз. Қандай жағдайда бұл тіркес аталған сандар тізбегін, қандай жағдайда қатарды мегзейтіні мәтінінен әр уақытта түсінікті болып тұрады.

*Шешуі:*Егер $|q|\ge 1$ болса,онда $\lim_{n\to\infty} aq^{n-1}\neq 0$ болатындығы айқын. Олай болса жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды да, геометриялық прогрессия жинақсыз болады. Енді $|q|<1$ болсын. Онда геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы $S_n=a(1-q^n)/(1-q)$ формуласымен анықталатындықтан $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-q}$ болатындығы белгілі. Осыдан туындайтын қорытынды: геометриялық прогрессия $|q|\ge 1$ болғанда жинақсыз, ал $|q|<1$ болса жинақты қатар және соңғы жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$

8 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ қатарының қосындысын тап.

Шешуі: Көпшілік жағдайда жалпы мүшесі n-ге тәуелді рационал функция болып келгенде, қатардың жалпы мүшесін қарапайым бөлшектерге жіктеу орынды. Осы арада да айтқанымызды орындасақ:

$$\frac{2(n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)+(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}+$$

$$+\frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

Алымдары бірдей қосылғыштарды бірінің астына бірін келтіріп алғашқы n мүшесін бағана ретінде жазайық:

$$a_1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5},$$

$$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6},$$

$$a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7},$$

$$a_5=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8},$$

……………………………..

$$a_{n-3}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

$$a_{n-2}=+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

$$a_{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3},$$

Осы бағаналарды қосу арқылы

$S_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$, теңдігін аламыз

Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{4}{3}$

9 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ қатарының жинақсыз болатындығын дәлелде.

Шешуі: Қатардың жалпы мүшесін мынадай түрде жазайық

$a_n=\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ell n\left(\frac{1+n}{n}\right)=\ell n(1+n)-\ell n\, n$

олай болса, осыдан

$a_1=\ell n2-\ell n1$,

$a_2=\ell n3-\ell n2$,

$a_3=\ell n4-\ell n3$,

……………….

$a_{n-1}=\ell n n-\ell n(n-1)$

$a_n=\ell n(n+1)-\ell n n$

Онда $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\ell n(n+1)$)

Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ell n(n+1)=\infty$

Қатардың қосындысы шексіз үлкен шама,яғни қатар жинақсыз.

1.2 Мүшелері оң таңбалы қатарлардың жинақтылығы

1 мысал. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots;$ қатарын қарастырайық.

Шешуі: Осы гармоникалық қатардың үшінші және төртінші мүшелерінің әрқайсысын $\frac{1}{4}$ ге, содан кейінгі 4 мүшесінің әрқайсысын $\frac{1}{8}$ ге, одан кейінгі 8 мүшесінің әрқайсысын $\frac{1}{16}$ ге, және тағы сол сияқты ауыстырайық. Сонда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8\ муше}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16\ муше}+\ldots \qquad (3)$$

(3) қатардың мүшелері гармоникалық қатардың мүшелерінен аспайды. Олай болса гармоникалық қатардың жинақсыздығын дәлелдеу үшін (3) қатардың жинақсыздығын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (3) қатардың бірдей мүшелер топтарын жаңа қатардың бір мүшесіне біріктірейік. Ал әрбір к-ші топта $2^{\kappa-2}$ мүше бар, оның әрбірінде мүшелері $\frac{1}{2^{\kappa-1}}$ тең, ал әр топтың мүшелерінің қосындысы ½ тең. Яғни қатар мына түрде беріледі.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots;$$

және оның жинақсыз екені ақиқат. Олай болса салыстырудың бірінші белгісі бойынша (3) қатар, сонымен бірге гармоникалық қатарда жинақсыз,

2 мысал. $\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$ қатарын қарастырайық.

Шешуі: $\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$ – теңсіздігі орынды болғандықтан, салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

3 мысал. $tq\frac{1}{1}+tq\frac{1}{2}+\ldots+tq\frac{1}{n}+\ldots$ қатары берілсін.

Шешуі: $tq\frac{1}{n}\rangle\frac{1}{n}$ болғандықтан , берілген қатардың мүшелері гармоникалық қатардың мүшелерінен артық . Олай болса берілген қатар жинақсыз.

4. Мысал. $\sin\frac{1}{1}+\sin\frac{1}{2}+\ldots+\sin\frac{1}{n}+\ldots$ қатарын жинақтылыққа тексерейік.

Шешуі: Ол үшін жинақсыз қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} tq\frac{1}{n}$ алайық.

Онда $\frac{\sin\frac{1}{n}}{tg\frac{1}{n}}=\cos\frac{1}{n}$, ал n≥1 болғанда $\frac{1}{2}<\cos\frac{1}{n}<1$, олай болса берілген қатар да жинақсыз.

5 мысал. $(e^{1/1}-1)+(e^{1/2}-1)+(e^{1/3}-1)+\ldots+(e^{1/n}-1)+\ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттейік.

*Шешуі:*Қосымша қатар ретінде гармоникалық қатарды алайық. Сонда, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$.

Осыдан салыстырудың екінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.

6 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте .

Шешуі: Берілген қатардың жалпы мүшесін жинақты $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ қатарының жалпы мүшесімен салыстырайық. Онда $\frac{n}{(n+1)3^n}<\frac{1}{3^n}$ n-нің барлық мәндерінде, теңсіздігінің орындалатынын байқаймыз. Олай болса бірінші салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

7 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$ қатарын жинақтылыққа зертте .

Шешуі: қатардың жалпы мүшесіннің шегін аныктайық, яғни $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}\neq 0$. Қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды. Қатар жинақсыз.

8 мысал. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ қатарын жинақтылыққа тексер .

Шешуі: $\frac{1}{\ln n}\rangle\frac{1}{n}$ (n≥2), ал $\frac{1}{n}$ жинақсыз гармоникалық қатардың жалпы мүшесі екенін ескерсек, онда салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.

9 мысал. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n+n}$ қатарды жинақтылыққа зертте .

Шешуі: Егер берілген қатарды гармоникалық қатармен салыстырсақ, яғни $\frac{1}{n+\ln n}<\frac{1}{n}$ болатынын байқасақ, онда қатардың жинақтылығы туралы ешқандай шешім айта алмаймыз. Дегенмен берілген қатарды гармоникалық қатармен салыстырудың екінші белгісін қолданып салыстырсақ.

$a_n=1/(n+\ln n)$,$b_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{в_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+\ln n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\ln n/n}=1\neq 0$$

Олай болса, салыстырып отырған қатарлар жинақтылығы мен жинақсыздығы жөнінен бірдей екені байқалады. Ал гармоникалық қатар жинақсыз болғандықтан берілген қатарда жинақсыз.

10 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}\right)$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі: $\ln\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}\right)=\ln\left(1+\frac{2n^2-1}{n^4+1}\right) \sim \frac{2n^2-1}{n^4+1} \sim \frac{2}{n^2}$ (~белгісі $n\to\infty$ тізбектердің баламалары болатындығын байқатады.) Олай болса, берілген қатар мен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ қатары жинақтылық тұрғысынан алғанда бірдей.Ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ қатар жинақты болғандықтан, берілген қатарда жинақты.

11 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі: Даламбер белгісін қолданайық. Бұл мысалда $a_n=2^n/n!$, $a_{n+1}=2^{n+1}/(n+1)!$ $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}n!/2^n(n+1)!=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$. Олай болса, қатар жинақты.

12 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{(3n+2)}\right)^n$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі белгілі өрнектің n дәрежесі, сондықтан Кошидің радикалдық белгісін қолдану ыңғайлы. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$

яғни $\rho<1$, болғанда берілген қатар жинақты.

13 мысал. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз. $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$ болғандықтан, x= n болғанда мәндері $f(n)$-ің мәндеріне тең функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ болады. Бұл функция $[2,\infty)$ аралығында үздіксіз және бірсарынды кемімелі. $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ дәйексіз интегралын есептейік.

$\int\limits_2^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{в\to\infty}\int\limits_2^{в}\frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{в\to\infty}\int\limits_2^{в}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{в\to\infty}[\ln\ln в-\ln\ln 2]=\infty$. Осыдан $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ дәйексіз интегралының жинақсыз екенін көреміз. Олай болса, берілген қатар жинақсыз.

14 мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n(2n)!!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

*Шешуі:*Тікелей тексеріп Даламбер мен Коши белгілерінің қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды айтуға мүмкіншілік бермейтініне көз жеткізу қиын емес. Ал қатардың жалпы мүшесі факториалдардан тұратындықтан Кошидің интегралдық белгісін қолдануда оңайшылыққа түспейді. Сондықтан қатарды зерттеу мақсатымен салыстырудың бірінші белгісін қолданайық. Қатардың жалпы мүшесін, яғни

$$a_n=\frac{(2n-1)!!}{n(2n)!!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{n\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

бағалап көрейік.

Екінші көбейткіштен бастап әр бөлшектің алымын да бөлімінде бір санына өсіре отырып және $\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$ (үйткені $4n^2-1<4n^2$) болатынын ескере отырып

$a_n < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{n^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}} = \frac{1}{n^2 a_n \cdot (2n+1)}$ теңсіздігін аламыз. Ал 2 n +1> n болғандықтан $a_n < \frac{1}{n^3 a_n}$, осыдан $a_n^2 < \frac{1}{n^3}$ Олай болса, $a_n < \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (3/2>1) қатары жинақты екенін ескерсек , онда салыстырудың бірінші белгісі бойынша зерттеліп отырған қатарда жинақты болатынын байқаймыз.

15 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n^{\sqrt{n}} / (n+1)^{\sqrt{n+1}-1}$ қатынасының $n \to \infty$ шегін табу оңай емес. Сондықтан Даламбер белгісін қолдана алмаймыз.Кошидің радикалдық белгісін қолданып көрейік.Шекті есептеу барысында $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^{n+1/2} e^{-n}$ -Стирлинг формуласын қолданамыз. Сонда

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[2n]{2\pi}}{e} \cdot n^{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}} = \infty$$

Қатар жинақсыз.

16 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)$ қатарын жинақтылыққа зертте

Шешуі: $\lim_{n \to \infty} (n a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} \ln\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right) = \lim_{n \to \infty} \ln\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right) = \ln 3 \neq 0$, болғандықтан, жинақсыздықтың жеткілікті шарты бойынша берілген қатар жинақсыз.

1.5 Санды қатарлар теориясының кейбір қолданулары

1 мысал. $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ a>0, теңдігін дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі. Мұнда $f(n) = \frac{a^n}{n!}$, $f(n+1) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ қатарын алып, оны Даламбер белгісі арқылы жинақтылыққа зерттейік. Сонда: $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1} n!}{a^n (n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$

Сонымен, жалпы мүшесі $\frac{a^n}{n!}$ болатын қатар жинақты. Олай болса жинақтылықтың қажетті шарты бойынша $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

2 мысал. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n} = 0$ теңдігін растаңыз.

*Дәлелдеуі.*Дәлелдеу үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n}$ қатарын қарастырамыз. Осы қатардың жинақтылығын Коши белгісі арқылы зерттейік. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{(3n)!}$

Енді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}=0$ болатындығын дәлелдейік. Ол үшін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(3n)!]^n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттейік, яғни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(3n)!}{n^n(3n+3)!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{(3n+1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ell}{(3n+1)(3n+2)}=$$

$$=\frac{\ell}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=0<1$$

Олай болса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(3n)!]^n}$ қатары жинақты. Онда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}=0$

Осыған байланысты алғашқы қатар Коши белгісі бойынша жинақты. Сонда оның жалпы мүшесінің $n\to\infty$ шегі, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n}=0$. Сонымен теңдік дәлелденді.

3 мысал. $\int\limits_2^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$ интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

$f(x)=\sqrt{x}e^{-x}=\frac{\sqrt{x}}{e^x}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция $x>0$ болғанда үздіксіз және оң таңбалы ал $x>1$ болса, онда бірсарынды кемімелі болып келеді. Енді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^n}$ қатарын алып, оны Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттейік.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^n}{e^{n+1}\sqrt{n}}=\frac{1}{e}<1$$

Олай болса, қатар жинақты. Онда $\int\limits_2^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$ интегралы да жинақты.

1.3 Таңбалары айнымалы қатарлардың жинақтылығы

1 мысал. $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\ldots$ (плюс, 2 минус, 3 плюс, 4 минус, 5плюс,…) қатарларын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларынан оң таңбалы жаңа қатар құрастырамыз,яғни $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Алынған қатар үшін $\rho=2>1$, олай болса ол жалпылама гармоникалық қатар ретінде жинақты. Сондықтан берілген қатарда жинақты, тіпті абсолютті жинақты болады.

2 мысал. Лейбниц белгісі бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз және жинақтылықтың түрін анықтаңыз.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамалары $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6^2}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$ теңсіздіктерін құрайды, яғни олар бірсарынды кемімелі. Сонымен қатар $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Олай болса, берілген қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Бірақ бұл қатар тек шартты жинақты, үйткені оның мүшелерінің абсолюттік шамаларынан жасалған қатар гармоникалық қатар ретінде жинақсыз.

3 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Алдымен $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ қатарын қарастырайық. (Берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларынан жасалған қатар). Бұл қатар оң таңбалы, сондықтан оған Даламбер белгісін қолданайық.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+1/n)^n\frac{1}{2(2n+1)}\right]=0<1$$

Сонымен оң таңбалы қатар жинақты, олай болса берілген қатарда жинақты болады.

4 мысал. $1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}+\ldots\frac{1}{(6n-5)^2}+\frac{1}{(6n-4)^2}+\frac{1}{(6n-2)^2}+\frac{1}{(6n-1)^2}+\ldots$

(екі плюс, екі минус …) қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларынан жаңа оң таңбалы қатар құрастырайық, яғни

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots. \qquad (A)$$

(A) қатары жинақты, үйткені оның S_n дербес қосындысы бірсарынды өспелі (n-өскенде) және жоғарыдан шектеулі, мысалы $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ санымен шектеулі. Олай болса, берілген қатар абсолютті жинақты болады.

Ескерту. (A) қатарының жинақтылығын басқаша да дәлелдеуге болады. Ол үшін

$1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots.$ қатарын қарастырайық.

Бұл қатар абсолютті жинақты, үйткені $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатар- мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құрастырылған- жинақты, онда 4-ші теорема бойынша, бұл қатардың оң таңбалы мүшелерінен жасалған (A) қатары да жинақты .

2 ФУНКЦИЯЛЫ ҚАТАРЛАР

2.1 Функциялық қатар және оның жинақтылық облысы

1 мысал. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots.+\frac{x^4}{2^n}+\ldots$ қатары x-тің әртүрлі мәндерінде еселігі $q=\frac{x}{2}$, болатын геометриялық прогрессия. Бұл қатар жинақты болу үшін $|x/2|<1$ шартының орындалуы қажет. Олай болса, қарастырылып отырған қатардың жинақтылық облысы $|x|<2$ болары анық.

2 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ қатарының жинақтылық облысын анықтайық. Бұл қатар жалпылама гармониялық қатар ретінде, егер $x>1$болса,онда абсолютті жинақты,ал егер $x\le 1$ онда қатар жинақсыз болады. Сондықтан қатардың жинақтылық облысы $1<x<\infty$ теңсіздігімен анықталады.

3 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ қатары егер $x>1$болса абсолютті жинақты, үйткені оның мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құрастырылған қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 2 мысалда анықталғандай $1<x<\infty$ аралығында жинақты. Егер $0\le x\le 1$ болса онда берілген қатар Лейбниц белгісін қанағаттандыратын таңбасы алма кезек айнымалы қатар ретінде шартты жинақты, ал егер $x\le 0$ болса, онда жинақтылықтың қажетті шартын қанағаттандырмайдын қатар ретінде қатар жинақсыз болады.

Сонымен қатардың жинақтылық облысы $x>0$ жиынымен сиппаталады.

4 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ қатарының жинақтылық облысын анықтайық. Бұл қатар еселігі $q=\ln x$, болатын шексіз геометриялық прогрессия, ал мұндай прогрессия $|q|<1$ болса жинақты, тіпті абсолютті жинақты, яғни $|\ln x|<1$ немесе $-1<\ln x<1$, олай болса $e^{-1}<x<e$ теңсіздігі қатардың жинақтылық облысын анықтайды.

5 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ қатарының жинақтылық облысы $-1 \le x < 1$ теңсіздігімен анықталатынын көрсетейік. Расында да x=0 болса, онда қатардың жинақтылығы күмәнсіз. Енді $x \ne 0$ болсын. Даламбер белгісін қолданайық. Ал бұл белгі тек оң таңбалы санды қатарларды зерттеуге қолданылатындықтан, берілген қатарды бірден абсолютті жинақтылыққа зерттейік. Бұл арада $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, сондықтан

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{x^n (n+1)} \right| = |x|$$

Осыдан, егер $|x|<1$болса, онда берілген қатар абсолютті жинақты,Егер $|x|>1$ болса, онда жинақтылықтың қажетті шартын қанағаттандырмайтын қатар ретінде зерттелетін қатар жинақсыз. Егер ρ=1 болса, онда Даламбер белгісінен қатардың жинақтылығы туралы жатымды жауап беру қиын, сондықтан $x \pm 1$ болғанда берілген қатарды ерекше зерттеу қажет. Сонда, егер x=1, болса онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатары алынады да, ол жинақсыз болады; ал егер $x = -1$ болса, онда Лейбниц белгісі бойынша жинақты $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ қатары алынады. Сонымен расында да берілген қатардың жинақтылық облысы

$-1 \le x < 1$ жиыны болатыны анықталды.

6 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^n}$ қатарының жинақтылық облысын анықтайық.

Қатарды Кошидің радикалдық белгісі бойынша абсолютті жинақылыққа зерттейік. $U_n(x) = \frac{(x-3)^n}{n^n}$ болғандықтан, кез келген x_n үшін $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{|x-3|^n}{n^n} \right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|}{n} = 0$. Олай болса, қарастырылып отырған қатардың жинақтылық облысы $-\infty < x < \infty$ болады.

7 мысал. Функциялы қатар $0!+x\cdot 1!+x^2\cdot 2!+x^3\cdot 3!+\ldots+x^n\cdot n!+\ldots$ кез келген $x \ne 0$ үшін жинақсыз. (мұны Даламбер белгісі арқылы оңай тексеруге болады). Олай болса бұл қатар тек $x = 0$ болғанда ғана жинақты

2.2 Функциялы қатарлардың бірқалыпты жинақтылығы

1 **мысал.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ қатарының кез келген кесіндіде бірқалыпты жинақты болуын анықтаңыз.

Кез келген x үшін $|\cos nx/n^2| \le 1/n^2$ теңсіздігі орынды.

Олай болса, жинақты $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ санды қатар берілген қатар үшін мажорлаушы қатар болып табылады. Сондықтан берілген қатар Вейерштрасс белгісі бойынша кез келген кесіндіде бірқалыпты жинақты болады.

2. 3 Дәрежелі қатарлар

1 мысал. Дәрежелі $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$ қатарының жинақтылық облысын анықтаңыз.

Бұл есепте $C_n = \frac{n^2}{2^n}$, $C_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, сондықтан $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{n^2}{2^n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} = 2$

Олай болса берілген қатар (-2,2) аралығында жинақты. Енді қатарды x=± 2 нүктелерінде жинақтылыққа зерттейік. x=± 2 болғанда дәрежелі қатар $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n^2$ түріне келеді. Алынған екі қатарда жинақтылықтың қажетті шартын қанағатттандырмайтындықтан жинақсыз қатарлар болады. Олай болса берілген қатардың жинақтылық облысы оның жинақтылық аралығымен бірдей, яғни -2< x< 2.

2 мысал. $1+\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ қатарының жинақтылық облысын анықтаңыз.

Бұл арада $C_n = n^n$, (А) формулаларының екіншісін қолданып , жинақтылық радиусын анықтаймыз.

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, олай болса берілген қатар x=0 нүктесінде ғана жинақты.

3 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ қатарының жинақтылық облысын анықтаңыз.

$C_n = \frac{1}{n!}$, $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ болғандықтан $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ $(-\infty,\infty)$ аралығында орналасқан кез келген x үшін берілген қатар жинақты.

4 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$ қатарының жинақтылық облысын анықтаңыз.

Бұл қатарға анықтап зер қойсақ шексіз көп коэфиценттерінің $c_0=c_2=c_3=c_5=c_6=c_7=c_8=c_{10}=c_{11}=\ldots=c_m=0$ $(m\neq n^2)$ болатынын байқаймыз.Олай болса (А) формулаларын пайдаланып қатардың жинақтылық радиусын анықтауға болмайды. Сондықтан қатардың жинақтылық облысын анықтау үшін тікелей Коши белгісін (Даламбер белгісін) қолданамыз.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{15^{n^2}x^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}|5x|^n = \begin{cases}\infty, & \text{егер } |5x|>1 \text{ немесе } |x|>1/5\\ 1, & \text{егер } |5x|=1 \text{ немесе } x=\pm 1/5\\ 0, & \text{егер } |5x|<1 \text{ немесе } -\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}\end{cases}$$

Сонымен қатар $\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ аралығында жинақты. Осы аралықтың шекаралық нүктелерінде қатар жинақсыз,үйткені $x = \pm\frac{1}{5}$ нүктелерінде берілген қатар жинақтылықтың қажетті шартын қанағаттандырмайды.

5 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ қатарының жинақтылық облысын анықтаңыз.

Берілген қатардан $y=e^{-x}$ алмастыруы арқылы $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ дәрежелі қатарын аламыз, және оның жинақтылық радиусы

$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Шекаралық y=e нүктесінде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(1+1/n)^{n^2}}$ түріне келеді және кез келген n үшін $\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, олай болса Коши белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз. $У=e^{-x}>0$ болғандықтан $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^{-n^2} y^n$ қатарының жинақтылық облысы 0<y<e теңсіздігі болады. Осыдан $0 < e^{-x} < \infty;\quad -\infty < -x < 1$. Олай болса x > -1. Осы теңсіздік бастапқы берілген қатардың жинақтылық облысы болады.

2.4 Қатарларды дифференциалдау және интегралдау

1 мысал. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots = S(x)$ қатарының қосындысын тап .

Алдымен берілген қатардың жинақтылық аралығын анықтаймыз. Біздің мысал үшін ол аралық (-1;1) екеніне көз жеткізу қиын емес. Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау теоремасын қолданып,берілген қатарды (-1;1) аралығының ішкі нүктелерінде мүшелеп дифференциалдаймыз. Сонда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=S'(x)$$

Алынған қатардың сол жағы еселігі $|x|<1$болып келетін шексіз кемімелі геометриялық прогрессия. Сондықтан $S'(x)=\frac{1}{1-x}$. Осыдан екі жағын интегралдау арқылы $S(x)=\int\frac{dx}{1-x}=-\ell n|1-x|+C$ теңдігін аламыз. Тұрақты шама С-ні табу үшін x=0, S(0)=0 екенін ескереміз, яғни 0=-ln|1-0|+C, осыдан C=0. Сонымен берілген қатардың қосындысы S(x)=-ln|1-x|

Берілген қатар x=1, нүктесінде жинақсыз (гармоникалық қатар ретінде), ал x=-1, нүктесінде Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Сонымен берілген қатардың –ln(1-x) функциясына жинақтылық облысы $-1\le x<1$теңсіздігімен сипатталады.

2 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n$ - қатарының қосындысын анықта. $x^2-1=y$ деп үйғарып, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ қатарын қарастырайық. Бұл соңғы қатар $|y|<1$ аралығында жинақты. (Даламбер белгісі арқылы анықтауға болады) $S(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ қатарын $[0,y]\subset(-1,1)$ кесіндісінде мүшелеп интегралдаймыз. (Ондай мүмкіншілік бар, өйткені қатарды мүшелеп интегралдау теоремасын қолданамыз). Сонда

$$\int_{\gamma}^{y}S(y)\,dy=\int_{d}^{y}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n\right)dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{y}(n+1)y^n dy=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}\Big|_{0}^{y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}=y+y^2+y^3+....$$

$$+y^{n+1}+...=y\left(1+y+y^2+y^3+....+y^n+..\right)=\frac{y}{1-y}$$

(жақшаның ішіндегі қатар шексіз кемімелі геометриялық прогрессия).Енді осы теңдіктің екі жағында у бойынша дифференциалдаймыз, яғни

$S(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)_y^{\backslash}=\frac{1}{(1-y)^2}$. Жоғарыдағы $y=x^2-1$ белгілеуін ескере отырып, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$ қосындысын аламыз. Бұл жіктеме орынды болу үшін $\left|x^2-1\right|<1$ болу қажет, яғни $-1<x^2-1<1;\quad 0<x^2<2$, осыдан $-\sqrt{2}<x<0$ және $0<x<\sqrt{2}$. Осы теңсіздіктер берілген қатардың $S(x)=\frac{1}{(2-x^2)^2}$ қосындысына жинақталу облысы болады.

3 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ қатарының қосындысын анықта.

Берілген қатардың қосындысын S(x) арқылы беогілеп $S'(x)$ және $S''(x)$ функцияларын табайық.

$S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+....,$

$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+....,$

$S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+....,$

Бірінші мен үшінші теңдіктерді салыстыру арқылы $S''(x)=S(x)$ болатын анықтаймыз. Бұл алынған өрнек S(x) функциясы арқылы берілген екінші ретті, тұрақты коэффиценті, біртекті дифференциалдық теңдеу және S(0)=1, $S'(0)=0$, оның алғы шарттары болып табылады. Осы теңдеуге сәйкес характеристикалық $к^2-1=0$ теңдеуін аламыз. Теңдеудің түбірлері $к_{1,2}=\pm 1$, нақты, әртүрлі, сондықтан $S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Тұрақты C_1 мен C_2 сандарын мына жүйеден $\begin{cases}S(0)=1\\ S'(0)=0\end{cases}$ немесе $\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1-C_2=0\end{cases}$ табамыз. Сонда $C_1=C_2=1/2$. Олай болса $S(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=Chx$

4 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ қатарының қосындысын тап.

Көмекші дәрежелі қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ құрастырамыз және оның қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз. $S(1)$ мәнін табу керек. Ол үшін $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ теңдігін x бойынша дифференциалдаймыз.(бұл мүмкін, себебі дәрежелі қатарды дифференциалдау туралы теореманы негізге аламыз) және туындылардан тұратын қатардың қосындысын табамыз.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}=\frac{1}{2-x}$$

Енді $S^{|}(x)=\dfrac{1}{2-x}$ теңдігін [0,x] кесіндісінде интегралдаймыз.

$$S(x)=\int_0^x \frac{dx}{2-x} = -\left[\ell n\left|2-x\right|\right]\Big|_0^x = -\ell n\left|2-x\right| + \ell n\,2$$

Онда $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,2^n} = \ell n\,2$

5 мысал. $\int_2^{\infty} \dfrac{dx}{x^{n+1}} = \dfrac{1}{n\,2^n}$ өрнегін ескере отырып $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,2^n}$ қатарының қосындысын анықтаңдар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \int_2^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\right)dx = \int_2^{\infty} \frac{1/x^2}{1-1/x} = \left[\ell n\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]\Big|_2^{\infty} = -\ell n\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ell n\,2$$

Біз бұл арада $\int$ мен $\sum$ белгілерінің орындарын ауыстырдық. Бұл орынды үйткені $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\tilde{o}^{\,n+1}}$ қатарының мүшелері $[2,\infty)$ аралығында үздіксіз және осы аралықта ол қатар бір қалыпты жинақты.

6 мысал. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ қатарының қосындысын анықта.

Қосымша $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ қатарды құрастырамыз.

Сонда $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)_x^1 dx = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}\right] dx =$$

$$\lim_{x\to 1-0} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{x\to 1-0} \left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Big|_0^x = \lim_{x\to 1-0} \left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{3}\ell n\,2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.5 Функцияны дәрежелі қатарға жіктеу

1 мысал. $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ функциясының x=0 нүктесінің аумағында Тейлор қатарына жіктеңдер.

Алынған қатардың қосындысының φ(X) функциясына тең болмайтындығын көрсетіңдер.

Берілген функция $(-\infty,\infty)$ аралығында анықталған және осы аралықта кез келген рет дифференциалданады. Бұл тұжырым $x \neq 0$ болғанда дәлелдеу қажет етпейді. Ал, егер x=0 болса онда

$\varphi^{/}(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^4}}{x} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{e^{t^4}} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{4t^3 e^{t^4}} = 0$. (Бұл жерде $x=\dfrac{1}{t}$, және Лопиталь ережесі қолданылды). $X \neq 0$ болғанда $\varphi^{/}(x) = \dfrac{4}{x^5} e^{-1/x^4}$ болғандықтан

$$\varphi^{//}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{/}(x)-\varphi^{/}(0)}{x-0} = 4\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x^6} = 4\lim_{t\to\infty} \frac{t^6}{e^{t^4}} = 4\lim_{t\to\infty} \frac{6t^5}{4t^3 e^{t^4}} = 6\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{t^4}} = 3\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2 e^{t^4}} = 0$$

Осыдан кез келген n үшін $\varphi^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{P(t)}{e^{t^4}}$. Мұндағы P(t)-қандай да бір көпмүшелік. Сондықтан Лопиталь ережесін пайдаланудың нәтижесі $\varphi^{n}(O) = O$ (n-кез келген сан) теңдігіне келтіреді. φ(X) функциясының x=0 нүктесінің аумағында Маклорен қатарының түрі

$$\varphi(0) + \frac{\varphi^{/}(0)}{1!}x + \frac{\varphi^{//}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + ...\, 0\cdot x^n + ...$$

Олай болса бұл қатар өзінің қосындысы ретінде тек қана 0 санын қабылдайды.Ал x≠0 болғанда φ(x)≠0, сондықтан φ(x) функциясының Маклорен қатары өзінің қосындысы ретінде φ(x) функциясына тең емес. Сонымен, φ(x) функциясының Маклорен қатарына жіктелмеуінің себебі Тейлор формуласының қалдығының $n \to \infty$ нөлге ұмтылмайтындығында.

2 мысал. $f(x) = 2^x$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

а)Тікелей жіктеу тәсілін қолданамыз.Ол үшін 2^x функциясының туындыларының x=0 нүктесіндегі мәндерін табамыз:

$f(x) = 2^x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = 2^x \ln 2$ $\qquad f'(0) = \ln 2$

$f''(x) = 2^x \ln^2 2$ $\qquad f''(0) = \ln^2 2$

$f'''(x) = 2^x \ln^3 2$ $\qquad f'''(0) = \ln^3 2$

……………………………………………………………….

$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2$ $\qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2$

…………………………………………………………………

Табылған туындылардың мәндерін (3) теңдікке, a=0 деп алып, қойып 2^x функциясы үшін Маклорен қатарын аламыз.

$$1+1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+....+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+.....$$

б) Алынған қатардың жинақтылық облысын табамыз. Сонда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\ln^n 2}{n!\ln^{n+1} 2}=\infty$$

Олай болса қатар х-тің кез келген мәнінде жинақты.

в) Алынған қатардың х-тің қандай мәндерінде 2^x функциясына жинақталатынын анықтайық. Осы мақсатпен $\ln^n 2<1$ теңсіздігін ескере отырып 2^x функциясының барлық туындылары кез келген [-R R] кесіндісінде бір сан 2^R –мен шектеулі болатындығын байқаймыз, яғни $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|2^x \ln^n 2\right| \le 2^R$.Олай болса алынған жіктеме (2теорема бойынша) барлық х-тің мәндерінде 2^x функциясына жинақты:

$$2^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n$$

3 мысал. $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{3}\right)$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

$\frac{x^2}{3}$=y деп белгілеп, siny функциясының y-тің дәрежелері бойынша жіктемесін пайдаланамыз:

$$\sin\frac{x^2}{3}=\sin y = y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}y^{2n-1}}{(2n-1)!}+....=\frac{x^2}{3}-\frac{x^6}{3!3^3}+\frac{x^{10}}{5!3^5}-\frac{x^{14}}{7!3^7}+....$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!3^{2n-1}}+....$$

Бұл қатар х-тің барлық мәндерінде де орынды,өйткені siny функциясы үшін жасалған қатар y-тің кез келген мәнінде жинақты.

4 мысал. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

$y=-x^2$ деп белгілеп $\frac{1}{1-y}$ функциясына (9) жіктемені қолданамыз. Сонда

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+\ldots.y^n+\ldots=1-x+x^2-x^4\ldots+(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Бұл жіктеме (-1,1) аралығында орынды.

5 мысал. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

$У=x^3$ деп белгілеп $(1+y)^{-1/3}$ функциясына (10) биномдық жіктемені қолданамыз:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}=(1+y)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{y}{3}+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^2+\ldots+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right).....\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n+$$

$$+\ldots=1-\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 4}{3^2 2!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}x^9+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\,....(3n-2)}{3^n n!}x^{3n}+\ldots$$

Бұл қатар $(-1,1]$ жартылай аралығында жинақты.

6 мысал. $f(x) = arctgx$ функциясы үшін х-тің дәрежелері бойынша жіктеме алыңдар.

$(ar\ crct)_x^1 = \frac{1}{1+x^2}$ теңдігін пайдаланып 4 мысалдағы $\frac{1}{1+x^2}$ функциясының жіктемесін мүшелеп интегралдаймыз. Сонда

$$ar\,crct = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + ...\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2^{n-1}} + ...$$

Алынған қатар $x = \pm 1$ нүктелерінде де $arctgx$ функциясына жинақты болғандықтан , алынған жіктеме $[-1,1]$ кесіндісінде орынды.

7 мысал. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)_x^1 = \left(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...\right)_x^1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1} + ...$$

Дифференциалдау кезінде жинақтылық аралығы өзгермейтіндіктен, алынған жіктеме -1< x<1 аралығында орынды.

8 мысал. $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ функциясын x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктеңдер.

Берілген $f(x) = e^x \dfrac{1}{1-x}$ функциясын екі функцияның көбейтіндісі ретінде қарастырып және әр көбейткішті x-тің дәрежесі бойынша қатарларға жіктеп, соңынан көбейту арқылы

$$e^x \frac{1}{1-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + ... + \frac{x^n}{n\,!} + ...\right) \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ...\right) =$$

$$= 1 + (x \cdot 1 + 1 \cdot x) + \left(1 \cdot x^2 + x^2 \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 1\right) + \left(1 \cdot x^3 + x^3 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \left(1 \cdot x^4 + x^4 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + ...$$

$$+ \left(1 \cdot x^n + x^n + \frac{x^n}{2\,!} + \frac{x^n}{3\,!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) + ... = 1 + 2x + \left(2 + \frac{1}{2\,!}\right) x^2 + \left(2 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!}\right) x^3 +$$

$$+ \left(2 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!}\right) x^4 + ... + \left(2 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + ... + \frac{1}{n\,!}\right) \cdot x^n + ...$$

Жіктеме (-1,1) аралығында орынды.

9 мысал. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясын x=1 нүктесінде Тейлор қатарына жіктеңдер.

Тікелей жіктеу тәсілін қолданайық. Сонда:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\ , \quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{3^2} x^{-5/3}, \quad f'''(x) = \frac{2 \cdot 5}{3^3} x^{-8/3},$$

………………………………………………………..

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3n-4)}{3^n} x^{-\frac{3n-1}{3}},$$

$$f(1) = 1\ , \quad f'(1) = \frac{1}{3}, \quad f''(1) = -\frac{2}{3^2}\ , \quad f'''(1) = \frac{2 \cdot 5}{3^3},...\ ,$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3n-4)}{3^n}$$

Табылған мәндерді (3) Тейлор қатарына, $x = 1$ деп алып қоямыз сонда:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 1\,!}(x-1) - \frac{2}{3^2 \cdot 2\,!}(x-1)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3\,!}(x-1)^3 - +... + (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n\,!}(x-1)^n + ... =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n\,!}(x-1)^n\ .$$

Енді қатар үшін қалдықтың нөлге ұмтылуы немесе ұмтылмауын анықтауымыз қажет. Дегенмен осы берілген функцияны екінші тәсілмен жіктеп көрейік.

Екінші тәсіл. y=x-1, x=1+y деп белгілеп $\sqrt[3]{1+y}$ функциясын Маклорен қатарына жіктейік, яғни

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{1}{3}y+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n$$

Бұл арада $m=\frac{1}{3}$ болғандағы биномдық қатар пайдаланылған. Биномдық жіктеме -1≤ y ≤1, кесіндісінде орынды болғандықтан, алынған жіктеме -1≤ x–1 ≤ 1, яғни 0 ≤ x ≤ 2 кесіндісінде орынды.

Екінші тәсілмен жіктеудің нәтижесі бірінші тәсіл нәтижесіндегі Тейлор қатарының қалдығының $n\to\infty$ нөлге тең екендігін дәлелдеуден құтқарды.

10 мысал. $f(x)=\frac{1}{4+3x}$ функциясын $x=-2$ нүктесінде Тейлор қатарына жіктеп, жинақтылық облысын анықтаңдар.

Берілген функцияны түрлендіреміз:

$$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{-2+3(x+2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3(x+2)}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}$$, мұндағы $y=\frac{3(x+2)}{2}$. Енді үлгілік (9) қатарды қолданайық:

$$\frac{1}{4+3x}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}=-\frac{1}{2}(1+y+y^2+y^3+\ldots+y^n+\ldots)=-\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{3(x+2)}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}(x+2)\right)^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}(x+2)^n+\ldots\right)\right]=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n.$$

Бұл қатар үшін $-1<\frac{3(x+2)}{2}<1$. Осыдан $-\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}$. Осы теңсіздік берілген қатардың жинақтылық облысы болып табылады.

11 мысал. f(x)=ln|cosx/2| функциясын cosx функциясының дәрежелері бойынша жіктеңдер.

Берілген функцияны түрлендірейік:

$$\ln|\cos x/2|=\frac{1}{2}\ln\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{2}\ln 2$$

cosx=y деп белгілеп, ln(1+y) функциясын қатарға жіктеу арқылы

$$\ln|\cos x/2|=\ln(1+y)-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n+\ldots\right]-\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos^n x}{n}$$

Алынған жіктеме ln|cosx/2| функциясына -1<cos x≤1, x≠π(2к–1) к-бүтін сан болғанда жинақты.

12 мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(2n)!}=S(x)$ қатарының қосындысын табыңдар.

Егер x≥0 болса, онда

$$S(x)=x^2-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(2n)!}+\ldots=x^2\left[1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}-\frac{(\sqrt{x})^6}{6!}+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]=x^2 Cos\sqrt{x}.$$

теңдігі алынады.

Ал егер $x<0$ болғанда $x=-y$ арқылы белгілеп

$$S(x)=x^2\left(1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{4!}+\frac{y^3}{6!}+\ldots+\frac{y^n}{(2n)!}+\ldots\right)=x^2\left[1+\frac{(\sqrt{y})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{y})^4}{4!}-\frac{(\sqrt{y})^6}{6!}+\ldots+\frac{(y)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]$$

$=x^2 Ch\sqrt{y}=x^2 Ch\sqrt{-x}$ теңдігін аламыз. Сонымен,

$$S(x)=\begin{cases} x^2\cos\sqrt{x}, & егер \quad x\ge 0\\ x^2 ch\sqrt{-x}, & егер \quad x<0\end{cases}$$

2.6 Қатарларды шектерді, туындыларды және интегралдарды есептеуге қолдану

1 мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right]$ - шегін тап.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\cos x-3\sin x}{x^4\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\right)\left(-3\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)\right)}{x^5}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)x^5+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{3}{7!}\right)x^6}{x^5}=\mathbf{2}$$ **мысал.**

$$=\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}=\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}$$

$f(x)=x^5\cos\dfrac{x}{2}$ функциясының x=0 нүктесіндегі 11-ші туындысын табыңдар.

Берілген функцияны x=0 нүктесінде Маклорен қатарына жіктейік:

$$x^5\cos\frac{x}{2}=x^5\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{8!}-\dots\right]=x^5-\frac{x^7}{2^2 2!}+\frac{x^9}{2^4 4!}-\frac{x^{11}}{2^6 6!}+\frac{x^{13}}{2^8 8!}-\dots$$

Ал $f^{(11)}(0)=C_{11}\,11!$ болғандықтан $f^{(11)}(0)=-\dfrac{11!}{2^6 6!}=-\dfrac{3465}{4}=-866{,}25$

3 мысал. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ функциясының кез келген туындысының x=-1 нүктесіндегі өрнегін табыңдар.

Берілген функцияны (x+1) – дің дәрежелері бойынша Тейлор қатарына жіктейміз

$$\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2(n+1)}}(x+1)^{2n}$$
.

$$C_{2n}=(-1)^n/2^{2(n+1)}\quad болса\ ,\ онда\quad C_{2n-1}=0(n=1.2.3.......)$$

Олай болса туындылар үшін мына өрнектерді аламыз:

$f^{(2n)}(-1)=C_{2n}\,(2n)!\ \dfrac{(-1)^n}{2^{2(n+1)}}\,(2n)!$; $f^{(2n-1)}(-1)=0$

4 мысал. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ интегралын қатар түрінде өрнектеңіз.

Интеграл астындағы функцияны x-тің дәрежелері бойынша Тейлор қатарына жіктейік.

$\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$ кесіндісі алынған қатардың жинақтылық облысында орналасқан, сондықтан қатар бұл кесіндіде бірқалыпты жинақты, сондықтан оны осы кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады. Интегралдауды орындап

$$\int_{1/4}^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/4}^{1/2}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{x^n}{n^2}\right]\Big|_{1/4}^{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2 4^n}$$

Алынған қатардың қосындысы берілген интегралдың дәл мәнін анықтайды.

5 мысал. $F(x)=\int_e^x \frac{dx}{\ln x}$ функциясын қатар түрінде өрнектеңдер.

ln x=y деп ұйғарайық , сонда x=e^y, ал dx=e^y dy. Сонымен

$$\int_e^x \frac{dx}{\ell nx} = \int_1^{\ell nx} \frac{e^y}{y}dy = \int_1^{\ell nx} \frac{1}{y}\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+...+\frac{y^n}{n!}+...\right)dy = \int_1^{\ell nx}\left(\frac{1}{y}+1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+...+\frac{y^{n-1}}{n!}+...\right)dy =$$

$$\left[\ln|y|+y+\frac{y^2}{2\cdot 2!}+\frac{y^3}{3\cdot 3!}+...+\frac{y^n}{(n-1)n!}+...\right]\Big|_1^{\ln x} = \left[\ln|\ln x|+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{\ln^3 x}{3\cdot 3!}+...+\frac{\ln^n x}{(n-1)n!}+...\right]-$$

$$-\left[1+\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 3!}+...+\frac{1}{nn!}+...\right] = \ln|\ln x|+\frac{\ln x-1}{1\cdot 1!}+\frac{\ln^2 x-1}{2\cdot 2!}+....+\frac{\ln^n x-1}{nn!}+...$$

Жіктеме x > 0 болғанда және x≠1 болғанда орынды.

2.7 Қатарлардың көмегімен жуықтап есептеулер

1 мысал. $\sqrt[4]{e}$ санын 0,00001 дәлдікпен есептеңдер.

e^x функциясының жіктемесіндегі $x=\frac{1}{4}$ деп аламыз, сонда

$$e^{1/4} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3 2!}+\frac{1}{4^3 3!}+\frac{1}{4^4 4!}+....$$

Егер осы қатардың бес мүшесін алсақ (n=4) , онда есептеудегі жіберілетін қате 0,00001-ден аспайды:

$$R_4 < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5 4!\left(5-\frac{1}{4}\right)} < 0{,}00001$$

Жоғарыда келтірілген қатардың алғашқы бес мүшесінің қосындысын табамыз,яғни $\sqrt[4]{e}$ ≈1,28403.

2 **мысал.** 0,0001 дәлдікпен cos 1° есепте.

cos 1°= cos $\frac{\pi}{180}$ болғандықтан x= $\frac{\pi}{180}$ деп белгілеп, cos 1°≈1- $\frac{\pi^2}{180^2 2!} \approx 0{,}9998$ аламыз.

Бұл арада $|R_2| \le \frac{\pi^4}{180^2 4!} < \frac{4^4}{180^2 4!} = \frac{1}{45^4 24} < 0{,}0000001$

3 мысал. 0,001 дәлдікпен $\sqrt[3]{68}$ санын есепте.

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4\sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/3}$$

Енді (1+x)$^{1/3}$ функциясын жіктейміз

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+... = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4 4!}x^4+...$$

Осы арада x = $\frac{1}{16}$ деп алып , қатарды 4-ке көбейтіп

$$\sqrt[3]{68} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3\bullet 16}-\frac{1\cdot 2}{3^2 2!16^2}\right) = 4+\frac{1}{12}-\frac{1}{576} \approx 4{,}082$$

Бұл жерде қатардан алынған үш мүше қажетті дәлдікті қамтамасыз етеді,үйткені

$$|R_3| \le 4\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3!16^3} < 0{,}001$$

4 мысал. 0,0001 дәлдікпен ln 2 санын есептеңдер.

ln $\frac{1+x}{1-x}$ функциясының жіктемесінде $\frac{1+x}{1-x}$ =2 деп аламыз, сонда x = $\frac{1}{3}$ болады, сондықтан

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3 3}+\frac{1}{3^5 5}+\frac{1}{3^7 7}+....\right)$$

Берілген дәлдіктікті қатардың төрт мүшесі қамтамасыз етеді, үйгкені $\left|R_n\right| < \left|\dfrac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|$ теңсіздігінде n=4, x = $\dfrac{1}{3}$ болса, онда

$$\left|R_4\right| < \frac{2\cdot 9}{3^9\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{3^9\cdot 4} < 0{,}0001$$

Сонымен , $\ln 2 \approx \dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{405}+\dfrac{1}{5103}\right) \approx 0{,}6931$

5 мысал. $\int\limits_0^2 \dfrac{\sin x}{x}dx$ интегралын 0,001 дәлдікпен есептеңдер.

($\dfrac{\sin x}{x} = 1$, x=0 деп ұйғарамыз)

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right) = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

Енді осы алынған жіктемені [0;2] кесіндісінде интегралдаймыз:

$$\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx = \left(x-\frac{x^3}{33!}+\frac{x^5}{55!}-\frac{x^7}{77!}+\ldots\right)\Big|_0^2 = 2-\frac{2^3}{33!}+\frac{2^5}{55!}-\frac{2^7}{77!}+\ldots$$

Интегралды көрсетілген дәлдікпен есептеу үшін қатардың төрт мүшесін алсақ жеткілікті,үйткені $\left|R_4\right| \le \dfrac{2^9}{(99!)} < 0{,}001$ Есептеулер жүргізіп

$\int\limits_0^2 \dfrac{\sin x}{x}dx \approx 1{,}605$ санын аламыз.

2.8 Қатарларды диференцалдық теңдеулерді шешуге қолдану

1 мысал. $y^{//}$=xsin $y^{|}$ теңдеуінің алғы шарттары y(1)=0; $y^{/}$ (1)= π/2 қанағаттандыратын шешімі үшін жасалған жіктеменің алғашқы алты мүшесін анықтаңдар.
X=1 нүктесі берілген теңдеу үшін айырықша нүкте емес, сондықтан ол теңдеудің шешімін қатар

$$y = y(1)+\frac{y^{/}(1)}{1!}(x-1)+\frac{y^{//}(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y^{///}(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{y^{/м}(1)}{4!}(x-1)^4\ldots..$$

түрінде іздеуге болады. Мұндағы y(1)=0; $y^{/}$(1)= π/2. Екінші, үшінші, төртінші және бесінші туындыларды табамыз.

$$y^{//}(1) = 1\cdot Sin\frac{\pi}{2} = 1;\quad y^{///}(x) = Siny^{/} + xy^{//}Cosy^{/} = Siny^{/} + x^2 Siny^{/}Cosy^{/} = Siny^{/} + \frac{1}{2}x^2 Sin\,2y^{/};\; y^{//}(1) = 1;$$

Дәл осылай $y^{/V}(1) = -1;\quad y^{(V)}(1) = -6$ табамыз. Табылған туындыларды қатарға қойып дифференциалдық теңдеудің шешімін табамыз.

$$y = \frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4-\frac{1}{20}(x-1)^5+\ldots$$

2 мысал. $y^{//}$-xy=0 теңдеуінің шешімін дәрежелік қатар ретінде анықтаңдар және алынған қатардың жинақтылық облысын анықтаңдар.
Теңдеудің шешімін дәрежелі қатар
$y=C_1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots+C_nx^n+C_{n+1}x^{n+1}+C_{n+2}x^{n+2}+\ldots$, түрінде іздейміз. Бұл қатарды қысқаша

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad (А)$$

немесе

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1} x^{n-1} \quad (C_1=0 \text{ деп ұйғарамыз}) \qquad (Б)$$

түрлерінде жазамыз. (А) және (Б) қатарлары теңдеуді шешу барысында қажет болады.
(А) қатарын дифференциалдап $y^{/}$ және $y^{//}$ табамыз
$y^{/}=C_1+2C_2x+C_2x+3C_3x^2+\ldots+nC_nx^{n-1}+(n+1)C_{n+1}x^n+(n+2)C_{n+2}x^{n+1}+$,

$y^{//}=2C_2+6C_3x+\ldots+n(n-1)C_nx^{n-2}+(n+1)nC_{n+1}x^{n-1}+(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\ldots=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n$$

$y^{/}$ және $y^{//}$ өрнектерін берілген дифференциалдық теңдеуге қойып

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^{n}-x\sum_{n=0}^{\infty}C_{n-1}x^{n-1}=0$$

теңдігін аламыз, немесе

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2}-C_{n-1}\right]x^{n}=0$$

Қатардың коэффиценттерін нөлге теңеу арқылы C_{n+2}-ні табамыз

$$(n+2)(n+1)C_{n+2}-C_{n-1}=0,\ C_{n+2}=\frac{C_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

егер n=0 болса $C_2=0$ ($C_1=0$ – ұйғарым бойынша); ал n=1 болса, онда $C_3=\frac{C_2}{2\cdot 3}$; ал n=2 болса, онда $C_4=\frac{C_1}{3\cdot 4}$; ал n=3 болса, онда $C_5=\frac{C_2}{4\cdot 5}=0$; ал n=4 болса, онда $C_6=\frac{C_3}{5\cdot 6}=\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$; ал n=5 болса, онда $C_6=\frac{C_4}{6\cdot 7}=\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$; ал n=6 болса, онда $C_8=\frac{C_5}{8\cdot 9}=0$. Жалпы, егер n=3к-3 болса, $C_{3к-1}=0$ (к=1,2,3…), егер n=3к-2 болса, онда

$$C_{3к}=\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3к-1)(3к)};$$

егер n=3к-1 болса, онда

$$C_{3к+1}=\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3к)(3к+1)};$$

табылған коэффиценттерді (А) жіктемесіне қойып

$$y=C_0+C_1x+\frac{C_0}{2\cdot 3}x^2+\frac{C_1}{3\cdot 4}x^3+\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6+\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots+\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3к-1)(3к)}x^{3к}+$$

$y=c_0+c_1x+$ $$+\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3к)(3к-1)}x^{3к+1}+\ldots=C_0\left(x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3к}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3к+1)(3к)}+\ldots\right.$$

$$\left.+C_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{x^{3к+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3к)(3к+1)}+\ldots\right)\right.$$

Осы алынған қатар қарастырып отырған теңдеудің жалпы шешімі.

3.1 Ортогоналды функциялар жүйесі бойынша алынған қатар.Тригонометриялық Фурье қатары

1 **мысал.** $(-\pi,\pi)$ аралығында F(x) = $\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ - функциасын тригонометриалық Фурье катарына жіктеңдер.

Берілген функция $(-\pi,\pi)$ аралығында шағын – жатық болады, ал оның $f\left[(2k-1)\pi\right]=\frac{\pi}{2},\quad k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots.$ - қосымша шарты бар периодты жалғасы жоғарыдағы 4 теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады.

Фурье коэффициенттерін анықтайық:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{3}{2\pi};$$

$$a_и=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Cosnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi Cosndx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xCosnxdx=-\frac{1}{\pi n^2}Cosnx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2};$$

$$в_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Sinxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi Sinxdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xSinnxdx=\frac{Cosn\ \pi}{n}=\frac{(-1)^n}{n}$$

Табылған коэффициенттерді (В) қатарына қойып

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}Cosnx + \frac{(-1)^n}{n}Sinnx\right]$$

қатарын аламыз.

Алынған жіктеме $(-\pi,\pi)$ аралығында кез келген х үшін орынды, теңдіктің оң жағындағы қатар х – тің барлық мәндерінде графигі 1 суретте келтірілген функцияға жинақты

2 мысал. $f(x) = x^2$ функциясы берілген. Осы функцияны: а) $(-\pi,\pi)$ аралығында; б) $(0,2\pi)$ аралығында; в) $(0,\pi)$ аралығында синустардан тұратын; г) $(0,\pi)$ аралығындағы жіктемесінің қосындысы х – тің кез келген мәнінде $(-\pi,0)$ аралығында нөльге тепе тең болатындай етіп Фурье қатарына жіктеңдер.

а) Қатардың коэфициенттерін есептейік. Берілген функция жұп болғандықтанқтан $в_n = 0,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 Cosnxdx$. Екі рет бөлшектеп интегралдап $a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}Sinnx + \frac{2x}{n^2}Cosnx - \frac{2}{n^3}Sinnx\right]\Big|_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n \neq 0$. Егер $n = 0$, онда $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2$;

Табылған коэфициенттер бойынша ізделген қатарды: $x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}Cosnx$ - аламыз.

Алынған формула $-\pi \le x \le \pi$ кесіндісінде орынды, ал жіктеменің өзі барлық х-тің мәндерінде x^2 функциясының бүкіл барлық сандар өсіндегі периодтық жалғастыруына жинақты болады. Қатардың қосындысының кескіні 2 суретте көрсетілген.

б) $(0,2\pi)$ кесіндісі $x = 0$ нүктесіне симметриялы емес, бірақ оның ұзындығы 2π болғандықтан, Фурье коэффициенттері

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2Cosnxdx\ ,\quad в_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2Sinnxdx$ түрінде жазылады.

Көрсетілген коэффициенттерді есептесек:

$$a_0 = \frac{8}{3}\pi^2,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}Sinnx + \frac{2x}{n^2Cosnx} - \frac{2}{n^3}Sinnx\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$в_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}Sinnx - \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)Cosnx\right]\Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n};$$

сандарын табамыз.

Табылған коэффициенттер бойынша ізделген қатарды жазамыз:

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4Cosnx}{n^2} - \frac{4\pi}{n}Sinnx\right);$$

Бұл жіктеме $(0,2\pi)$ аралығында орынды, ал оның қосындысы кез келген х – тің мәнінде кескіні 3 суретте келтірілген функцияға жинақты.

в) Синустардан тұратын қатарға жіктелетін функция тақ болуы қажет. Сондықтан, $f(x)$ функциясының $(-\pi,0)$ ралығындағы тақ жалғастыруын қарастырамыз. Онда

$$a_n = 0,\ ал\ в_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2Sinnxdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}Sinx - \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)Sinnx\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{2\pi}{n}.$$

Сонымен ізделіп отырған жіктемеміз

$$x^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{n^3}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}Sinnx - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n} = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sin\,(2n-1)x}{(2n-1)^3} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n}$$

теңдігімен анықталады.

Алынған жіктеме барлық $x \in (0,\pi)$ үшін орынды, ал теңдіктің оң жағындағы қатар х – тің барлық мәндерінде кескіні 4 суретте көрсетілген функцияға жинақты.

г) Іс жүзінде $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Фурье коэффициенттерін есептейік:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2Cosnxdx = (-1)^2\frac{2}{n^2}$$

$$в_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nxdx = \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{\pi}{n};$$

Олай болса,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^2 - 1\right] - \frac{\pi}{n}\right\}\sin nx$$

қатарын аламыз.

Алынған жіктеме $0 \le x < \pi$ аралығында орынды, ал қатар (теңдіктің оң жағында орналасқан) х-тің барлық мәндерінде кескіні 5 суретте келтірілген функцияға жинақты.

3 мысал. $\begin{cases} \frac{1}{3}x(4x + x), & -4 \le x < 0 \\ \frac{1}{3}x(4 - x), & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

функциясын $[-4,4]$ кесіндісінде тригонометриялық қатарға жіктейік.

Бұл функция $[-4,4]$ кесіндісінде үздіксіз және тақ. Шындығында да берілген функцияның екінші жолдағы мәнінде х-ті (-х) – ке ауыстырсақ, онда $-\frac{1}{3}x(4x + x)$ функциясын, яғни бірінші жолдағы мәнін аламыз. Берілген функция Дирихле теоремасының (4 теорема) барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан оны тригонометриялық Фурье қатарына жіктеуге болады. Сонда: $a_n = 0\ (n = 0;1;2;3....)$ ал

$$в_n = \frac{2}{3\cdot 4}\int_0^4 x(4 - x)Sin\frac{\pi xn}{4}dx = \frac{128}{3n^3\pi^2}\left[1 + (-1)^{n-1}\right].$$

Сонымен іздеген қатарымыз $f(x) = \frac{128}{3\pi^3}\left(Sin\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^3}Sin\,3\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{5^3}Sin\,5\frac{\pi x}{4} + ...\right)$, $[-4,4]$ кесіндісінде орынды.

Фурье қатарларын оң жақтары периодты функция болып келетін сызықтық теңдеулердің периодты шешімдерін табуға қолдануға болады.

4 мысал. $y'' - 2y = f(x)$, мұндағы $f(x)$ $T = 2\pi$ периодты функция және ол $(0,2\pi)$ аралығында $f(x) = (\pi - x)/2$ түрінде берілген. Фурье қатарын қолданып берілген теңдеудің кез келген бір дербес шешімін табайық.

Берілген функцияны Фурье қатарына жіктейік. Сонда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Sinnx$, мұндағы $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}Sindx$. Бөлшектеп интегралдап $c_n = \frac{1}{n}$ болатынын анықтаймыз. Сонымен,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n}, \quad x \ne 2\pi к.$$

Олай болса

$$y'' - y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n}$$

теңдеуін шешуіміз қажет.

Бұл теңдеудің шешімін

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n Cosnx + в_n Sinnx) \qquad (Д)$$

тригонометриялық қатары түрінде іздестіреміз. Сонда

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2 a_n Cosnx - n^2 в_n Sinnx) \qquad (Ж)$$

теңдеуін аламыз.

(Д) және (Ж) өрнектерін берілген теңдеуге қойсақ, онда

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-2 - n^2)a_n Cosnx + (-2 - n^2)в_m Sinnx\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n}$$

теңдігін аламыз. Осыдан $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ (-2 - n^2)в_n = \frac{1}{n},$ немесе $в_n = -1/(n(n^2 + 2))$

Табылған коэффициенттерді (Д) теңдігіне қойып

$$y = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sinnx}{n(n^2 + 2)}, \quad x = 2k\pi$$

іздеп отырған шешімді аламыз.

3.1 Фурье интегралы

1 мысал. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$ функциясын Фурье интегралымен өрнектеңдер. Алынған нәтижені $\int\limits_0^{\infty} \frac{Sin^3 t}{t} dt$ интегралын есептеуге пайдаланыңдар.

Берілген $f(x)$ функциясы тақ функция, сондықтан

$$a(\alpha) = 0, \quad в(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t) Sin\ \alpha t dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1} Sin\ \alpha t dt = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{Cos\ \alpha t}{\alpha}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}\frac{1 - Cos\ \alpha}{\alpha}$$

Берілген функция $f(x)$ үшін Фурье интегралының түрі

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} в(\alpha) Sin\ \alpha x d\alpha = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1 - Cos\ \alpha}{\alpha} Sin\ \alpha x d\alpha = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Sin^2\frac{\alpha}{2} Sin\ \alpha x \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad (A)$$

теңдігіндей болады.

Енді $\int\limits_0^{\infty}\frac{Sin^3 t}{t} dt$ интегралын есептейік. (А) теңдігінен $\int\limits_0^{\infty} Sin^2\frac{\alpha}{2}\ Sin\ \alpha x\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{4} f(x)$ - өрнегін аламыз. Осы арада $x = \frac{1}{2}$ деп алып, және $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ болатындығын ескере отырып $\int\limits_0^{\infty}\frac{Sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{4}$ теңдігін аламыз. Олай болса $\frac{\alpha}{2} = t$ деп ұйғарып,

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{Sin^3 t}{t} dt = \frac{\pi}{4} \text{ -}$$

ізделінген интегралдың мәнін табамыз.

2 мысал. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 0 \end{cases}$ функциясын Фурье интегралының кешенді түрімен өрнектеңдер.

(6) формула бойынша $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$, мұндағы

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha}\right] = \frac{1}{\pi\alpha} Sin\ \alpha;$$

Олай болса,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Sin\ \alpha}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha,$$